TP N°
LÍMITES

Notación:

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) =$ Se lee: *"límite de la función **f** cuando **x** tiende al valor **a** **por la derecha"***

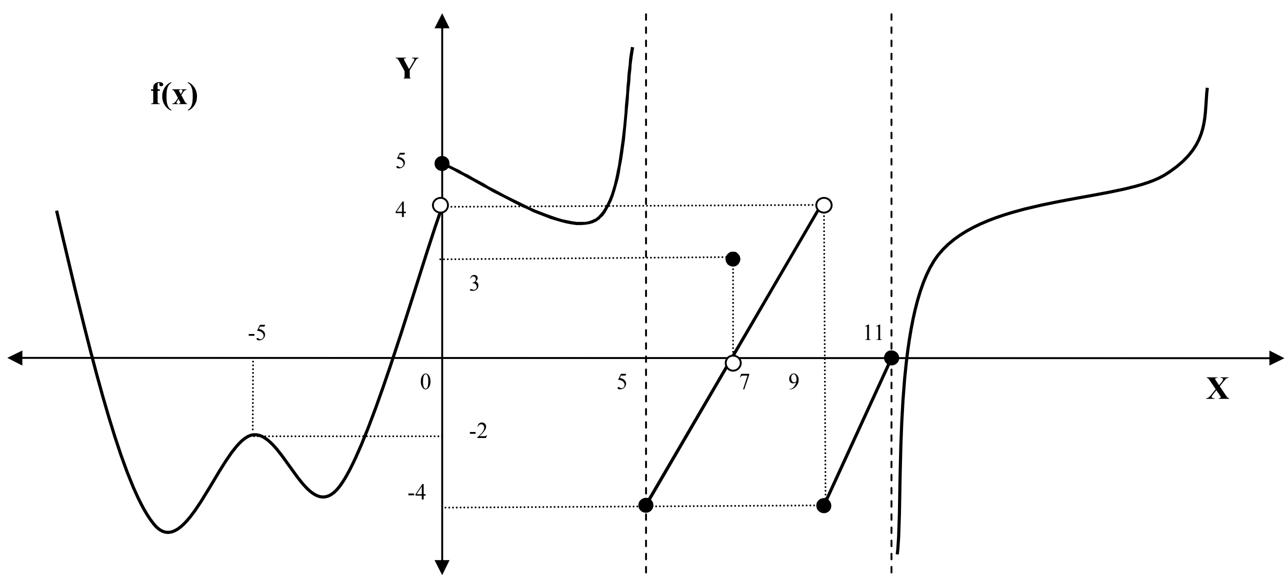
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) =$ Se lee: *"límite de la función **f** cuando **x** tiende al valor **a** **por la izquierda"***

Cuando $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ decimos directamente:

*"el límite de la función **f** cuando **x** tiende al valor **a*** es igual a ***L"***

y lo notamos como: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

1) Miren los gráficos de las funciones y calculen, si existe, lo que se indica



a) $f(-5) =$ $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to -5} f(x) =$

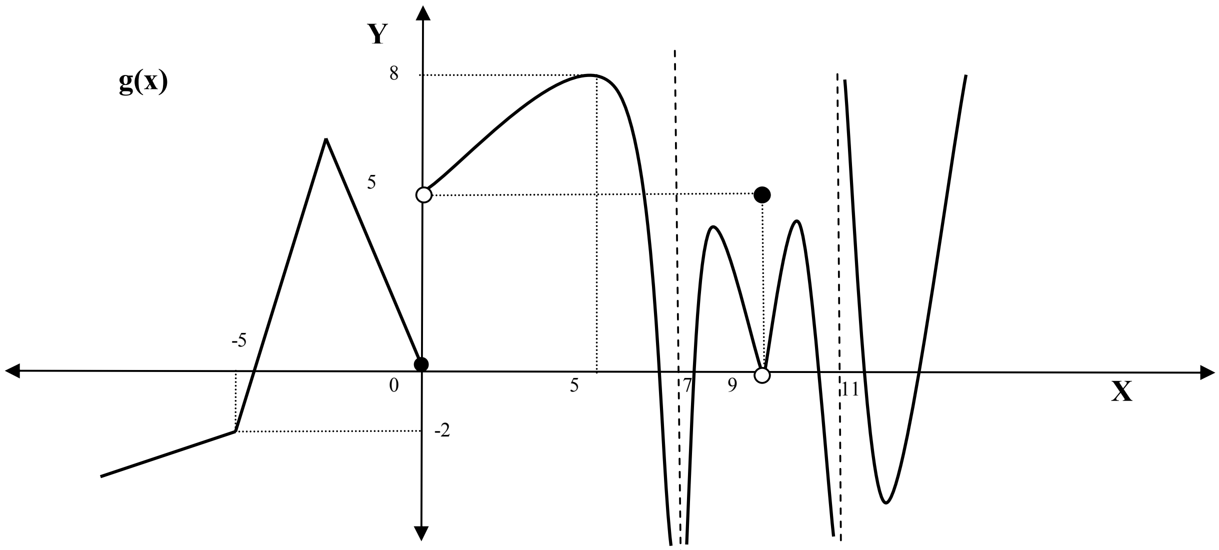
b) $f(0) =$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

c) $f(5) =$ $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 5} f(x) =$

d) $f(7) =$ $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 7^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 7} f(x) =$

e) $f(9) =$ $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 9^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 9} f(x) =$

f) $f(11) =$ $\lim\limits_{x \to 11^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 11^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 11} f(x) =$



a) $g(-5) =$ $\quad \lim\limits_{x \to -5^-} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to -5^+} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to -5} g(x) =$

b) $g(0) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} g(x) =$

c) $g(5) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 5^-} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 5^+} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 5} g(x) =$

d) $g(7) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 7^-} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 7^+} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 7} g(x) =$

e) $g(9) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 9^-} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 9^+} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 9} g(x) =$

f) $g(11) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 11^-} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 11^+} g(x) =$ $\quad \lim\limits_{x \to 11} g(x) =$

2) Hagan un gráfico de una función para cada caso que verifique <u>simultáneamente</u> las tres condiciones indicadas

a) $f(1) = 6 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 6 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

b) $g(1) = 2 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 6 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 6$

c) $h(1) = 2 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = 2 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = 2$

d) $j(1) = 2 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^+} j(x) = 4 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^-} j(x) = 6$

e) $k(1) = \nexists \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^+} k(x) = 6 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^-} k(x) = 6$

3) Dado los dominios de las funciones, hagan un gráfico para cada caso que verifique <u>simultáneamente</u> las tres condiciones indicadas

a) $D_f = (-3;1) \cup (2;4)$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 2$

b) $D_g = (-4;0) \cup (0;5)$ $\quad \lim\limits_{x \to -4^+} g(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 2 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -2$

c) $D_h = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0;+\infty)$ $\quad \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} h(x) = 1 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 2$

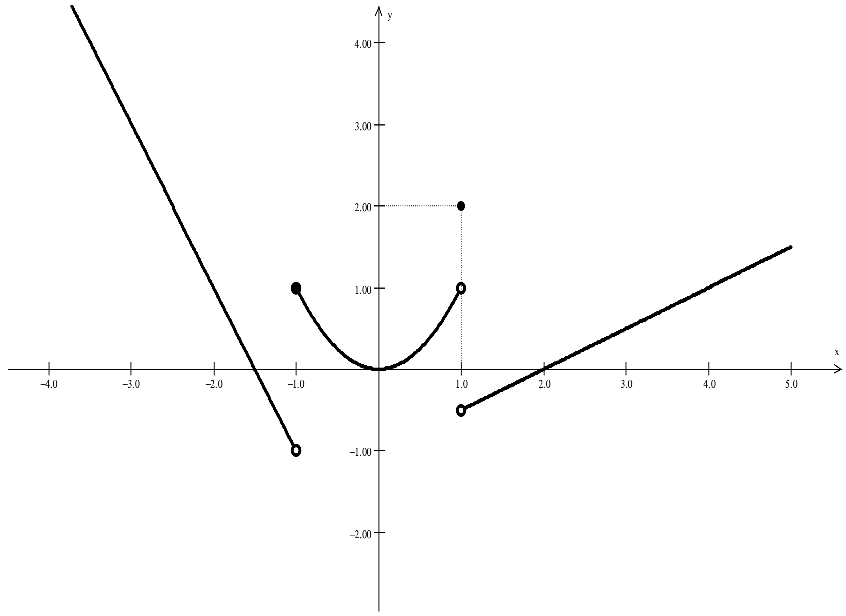
Función partida

Se llama "función partida" a aquella que presenta más de una fórmula para distintas regiones de su dominio. Éstas pueden estar dadas por intervalos o por puntos. Luego, cada una de esas regiones estará definida por una fórmula en particular.

Ej: fórmula dominio

$$f(x)=\begin{cases} -2x-3 & \text{si } x<-1 \\ x^2 & \text{si } -1\le x<1 \\ 2 & \text{si } x=1 \\ \dfrac{x}{2}-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

su gráfico será:



4) Dadas las funciones partidas, tracen el gráfico y determinen -si es que existen- los valores funcionales y los límites indicados

$$f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si } x\le 1 \\ x & \text{si } 1<x<4 \\ \dfrac{x}{2}-1 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$$

$f(1)=$ $\quad f(4)=$ $\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=$

$\lim_{x\to 1} f(x)=$ $\quad \lim_{x\to 4^+} f(x)=$ $\quad \lim_{x\to 4^-} f(x)=$ $\quad \lim_{x\to 4} f(x)=$

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$g(0)=$ $\quad \lim_{x\to 0^+} g(x)=$ $\quad \lim_{x\to 0^-} g(x)=$ $\quad \lim_{x\to 0} g(x)=$

$\lim_{x\to +\infty} g(x)=$ $\quad \lim_{x\to -\infty} g(x)=$ $\quad \lim_{x\to \infty} g(x)=$

Continuidad de una función en un punto

Diremos que una función **f** es continua en un punto a si se cumplen tres condiciones simultáneamente
$$\begin{cases} \exists\, f(a) \\ \exists \lim_{x\to a} \\ f(a)=\lim_{x\to a} \end{cases}$$

Si esto ocurre para **todos los valores del dominio** de **f** diremos que la función **f** es **continua**

Propiedades de los límites

(completen los ejemplos)

* Límite cuando **x** tiende a un valor **a** tal que **f** es continua en algún **E(a; δ)**

$$\lim_{x \to a} f(a) = f(a)$$

Ej:

* Límite de una constante

$$\lim_{x \to a} k = k$$

Ej:

* Límite de una constante distinta de cero por una función

$$\text{si } k \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} [k.f(x)] = k.\lim_{x \to a} f(x)$$

Ej:

* Límite de la suma o diferencia de dos funciones

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} [f(x)] \pm \lim_{x \to a} [g(x)]$$

siempre que no quede $\infty - \infty$

Ej:

* Límite del producto entre dos funciones

$$\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} [f(x)] . \lim_{x \to a} [g(x)]$$

siempre que no quede $0.\infty$

Ej:

* Límite del cociente entre dos funciones $\left(\lim_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$

$$\lim_{x \to a} [f(x) : g(x)] = \lim_{x \to a} [f(x)] : \lim_{x \to a} [g(x)]$$

siempre que no quede $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ej:

* Límite de una función elevada a otra función, ambas continuas en todo su dominio

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} [f(x)]^{\lim_{x \to a} [g(x)]} \quad \text{con } f(x) > 0$$

siempre que no quede $0^0 \vee \infty^0 \vee 1^\infty$

Ej:

* Límite de función de otra función, ambas continuas en todo su dominio

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f\left\{\lim_{x \to a} [g(x)]\right\}$$

Ej:

* Límite de una función acotada superior e inferiormente por otras dos funciones de límites conocidos (Ley del "sanguchito")

$$\text{Si} \begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{en un } E´(a; r) \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x \to a} g(x) = L}$$

5) Calculen los siguientes límites determinados

a) $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) =$ b) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 2) =$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{x} =$ d) $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} \left(\dfrac{2}{3}x - 4\right) =$ e) $\lim\limits_{x \to 100} \log(x) =$

f) $\lim\limits_{x \to 2} (3^x - 1) =$ g) $\lim\limits_{x \to 0} 13^{x-1} =$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) =$ i) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos^2(x) =$ j) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(x) =$

6) Calculen los siguientes límites aplicando propiedades

a) $\lim\limits_{x \to \pi} [\operatorname{sen}(x) + \operatorname{tg}(x)] =$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\log(x + 8) + \sqrt{7 + x}\right] =$ c) $\lim\limits_{x \to -6} \left[x^{-1}.\sqrt[3]{x + 5}\right] =$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \left[\cos(x.\pi) - x^3\right] =$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{3}}{x - 1}\right] =$ f) $\lim\limits_{x \to -1} 3^{2x} =$

g) $\lim\limits_{x \to 0} (2 + x)^{x^2 - 2} =$ h) $\lim\limits_{x \to 8} \left(\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x\right)^{\sqrt[3]{x}} =$ i) $\lim\limits_{x \to 3} 2^{\frac{x^2 - 1}{2}} =$

j) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\sqrt{x}\right)^{\log(5x-5)^2} =$ k) $\lim\limits_{x \to 4} (3x - x^2)^{1 + \sqrt{x}} =$ l) $\lim\limits_{x \to -1} \left[\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^3}\right] =$

7) Calculen los límites de las siguientes funciones conociendo el de otra función; apliquen propiedades

a) Si $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{4f(x) - 3g(x)}{2f(x)}\right] = -3 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = -6$ Calcular $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$

b) Si $\lim\limits_{x \to a} [g(x)]^{f(x)} = 243 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = 5$ Calcular $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$

Límites notables

Para todo número real "**a**" **positivo** se tiene que:

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{a}{x}\right] = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \left[\frac{a}{x}\right] = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{-a}{x}\right] = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \left[\frac{-a}{x}\right] = +\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{a}{x}\right] = 0$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

Cuando calculamos el cociente entre dos números enteros ***a*** y ***b*** sabemos que el resultado debe obedecer dos reglas muy simples:

1°) $\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow b.c = a$ **2°)** ***c*** debe ser el **único número** que **verifique** la primera condición

Por ejemplo: $\frac{10}{2} = 5$ porque **5.2 = 10** y **5** es el ***único número*** que verifica esta igualdad, ***no hay otro***

Sin embargo, cuando se trata de dividir un número positivo o negativo **por cero** no es posible hallar un número que verifique **las dos** condiciones.

Por ejemplo, si tenemos $\frac{3}{0}$ y suponemos que existe *cierto número desconocido* "**x**" que verifica la primera condición debería ser que **0 . x = 3** pero esto es un **absurdo** porque:

> ***"todo número multiplicado por cero da cero"*** (¡ no 3 !)

Sin importar cuán grande elijamos a "x", **0.x nunca va a dar 3** (va dar, como ya dijimos: cero). Es decir:

> **No es posible dividir un número positivo o negativo por cero**

Por otra parte, si tratamos de **dividir cero por cero** nos encontramos con una *sorprendente* situación:

el divisor

Parecería que $\frac{0}{0} = 0$ puesto que **0 . 0 = 0** El dividendo

el *"resultado"*

Y se estaría cumpliendo así, la primera condición. Sin embargo, cualquier observador notará que se podría afirmar:

$\frac{0}{0} = 1$ puesto que **0 . 1 = 0**

Y del mismo modo, podría decirse que el *"resultado"* es $-1; 2; 117; -1001; \sqrt{3}; ...$ o *cualquiera* de los infinitos números reales, es decir, ***el resultado no está determinado***, por eso decimos que:

$$\boxed{\frac{0}{0} \text{ es una indeterminación}}$$

Nota:

Afirmar que $\frac{0}{0} = 1$ es como simplificar así $\frac{\cancel{0}^{1}}{\cancel{0}_{1}} = 1$ que conduce a contradicciones del tipo 0.1= 0.2 $\Rightarrow \frac{\cancel{0}.1}{\cancel{0}} = 2 \Rightarrow$ 1=2 *Absurdo!*

<u>Casos básicos de factorización de polinomios</u>: *recordatorio*

<u>Factor común</u>: es la operación que invierte los efectos de aplicar la *propiedad distributiva*

a(b+c) = **a**b + **a**c en el miembro de la derecha podemos ver que el factor **a** es <u>común</u> a ambos términos

Para extraer el *factor común* de una expresión del tipo **a**b + **a**c primero debemos ver cuál es el que está <u>repetido en todos los términos</u>. Luego, para hallar el factor que va dentro del paréntesis, debemos dividimos cada uno de los términos dados por el o los factores comunes considerados

Ej: $2x^4 - 6x + 4x^3 = 2x(x^3 - 3 + 2x^2)$ Ej: $\frac{2}{5}x^4 - \frac{6}{25}x^3 + \frac{4}{15}x^5 = \frac{2}{5}x^3\left(x \ - \frac{3}{5} + \frac{2}{3}x^2\right)$

<u>Diferencia de cuadrados:</u>

$$(x + a).(x - a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$$

Es decir, cuando tenemos una diferencia entre dos potencias cuadradas es posible expresarlas como el producto entre la suma de las bases por la diferencia de las mismas:

$$x^2 - a^2 = (x + a).(x - a)$$

Ej: $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$ Ej: $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1)(x - 1)$

<u>Gauss- Ruffini:</u>

Si un número ***a*** es raíz de un polinomio ($\mathbf{P_{(a)}=0}$), entonces **x – a** divide al polinomio (teorema de *Gauss*).
Luego, como **x - a** es un divisor de la forma *Ruffini* , es posible aplicar su algoritmo ("tablita") para hacer dicha división, con lo cual el polinomio quedará factorizado de la siguiente forma:

$\mathbf{P_{(x)} = (x\text{-}a).C_{(x)}}$ siendo $\mathbf{C_{(x)}}$ <u>el polinomio cociente</u>

Ej:
$P_{(x)} = -x^3 + 3x - 2$ vemos que $P_{(1)} = -1^3 + 3.1 - 2 = 0$ por lo tanto $x = 1$ <u>es raíz</u>,

con lo cual $x - 1$ divide a $P_{(x)}$ y es posible aplicar *Ruffini:*

		-1	**0**	3	-2	Coeficientes ordenados y completos del dividendo
raíz	1		-1	-1	2	
		-1	-1	2	0	<u>Resto</u>: si lo hicimos bien SIEMPRE debe dar CERO

Coeficientes ordenados y completos del polinomio cociente, es decir: $\mathbf{C_{(x)}: -x^2 -x+2}$

Entonces **podemos expresar el polinomio original** como**:**

$\mathbf{P_{(x)} = (x\text{-}1).(-x^2 - x+2)}$ que es el <u>polinomio ya factorizado por una de sus raíces</u>

Cálculo de límites que presentan una indeterminación 0/0

En algunos casos es posible usar la factorización de las expresiones para "salvar" la indeterminación.

Ej:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-1}{x-1}\right]=\frac{0}{0}$$

dado así, no es posible determinar su valor, por eso vamos a factorizar numerador y denominador de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-1}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\right]=\lim_{x\to 1}[x+1]=2$$

Fíjense que **x -1** **NO ES CERO** porque estamos considerando que **x *tiende* a 1**, **NO QUE SEA 1.** Esto ocurre porque estamos **trabajando en un entorno reducido de centro 1 y radio muy pequeño**, con lo cual la **simplificación** es **VÁLIDA.**

Es posible que al factorizar y simplificar **una vez**, aún se **mantenga la indeterminación**. Si éste es el caso, sólo debemos **volver a factorizar la expresión resultante** (*numerador* y *denominador*) para hacer una nueva simplificación a fin de salvar la indeterminación y calcular el límite pedido.

8) Calculen los siguientes límites. Si hay una indeterminación **0/0** sálvenla factorizando la expresión

a) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=$ Rta: 8

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=$ Rta: 2

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}=$ Rta: 0

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-11x+1}{x^4-5}=$ Rta: $-\frac{1}{5}$

e) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x+4}=$ Rta: -2

f) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=$ Rta: 0

g) $\lim_{x\to -1}\frac{4x^2+8x+4}{x+1}=$ Rta: 0

h) $\lim_{x\to -1}\frac{3x^6-9}{x-2}=$ Rta: 2

i) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2-5}{10x+5}=$ Rta: $-\frac{2}{5}$

j) $\lim_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{x^2-16}=$ Rta: $\frac{5}{8}$

k) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=$ Rta: $\frac{5}{4}$

l) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-7x+6}{x^3+5x^2+2x-8}=$ Rta: $-\frac{4}{15}$

m) $\lim_{x\to 1}\frac{-x^3+7x-6}{x^3-4x^2+x+2}=$ Rta: -1

n) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2+2x+1}=$ Rta: 1

Abuso de notación:

Cuando los límites laterales dan **infinitos de distintos signos**, decimos que el límite para ese valor de "**x**" de **f(x)** *es infinito*, *sin anteponerle ningún signo*, es decir: ∞ (ojo!, no se trata de un número sino de un *concepto*)

a) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=$ Rta: ∞

b) $\lim_{x\to -1}\frac{5}{2x+2}=$ Rta: ∞

Operaciones con infinito (ojo!)

Algunas operaciones que incluyen al infinito pueda prestarse a confusión si las tratamos como si fueran finitas.
En general tendemos a pensar que:

$$\infty - \infty = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\infty}{\infty} = 1$$

Eso ocurre sólo porque lo asimilamos al hecho conocido de que para cualquier NÚMERO **a**:

$$a - a = 0 \qquad \text{y} \qquad \text{si } a \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{a} = 1$$ lo cual, por supuesto, es CIERTO

Sin embargo, veremos que suceden cosas sorprendentes al tratar con "bichos" infinitos.

Caso ∞ - ∞

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \wedge \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ son infinitos de igual signo, se tiene que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)]$ es una **indeterminación**

Veamos:

Dada una función **f(x)** siempre es posible reescribirla como otra función **h(x)** del siguiente modo:

$f(x) = \dfrac{1}{h(x)}$ con lo cual resulta, por simple despeje: $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

y lo mismo para g(x), es decir: $g(x) = \dfrac{1}{t(x)}$ y $t(x) = \dfrac{1}{g(x)}$

Reescribiendo tendremos: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{h(x)} - \dfrac{1}{t(x)} \right]$

Por otra parte, es relevante observar que:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{h(x)} = \infty \qquad \text{y lo mismo para g(x):} \quad \lim_{x \to +\infty} t(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{t(x)} = \infty$$

Trabajemos ahora la última expresión con denominador común como suma de fracciones:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{t(x)} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{t(x) - h(x)}{h(x).t(x)} \right] = \frac{0 - 0}{0.0} = \frac{0}{0}$$ ⇦ **INDETERMINACIÓN**

Por lo visto, **∞ - ∞ NO ES CERO**, sino que se trata de una **indeterminación** $\dfrac{0}{0}$

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(x-1) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x+4) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} (\cancel{x} + 4 - \cancel{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4 = 4$

INDETERMINACIÓN
pues puede dar *cualquier cosa*
según el caso

9) Calculen los siguientes límites. Si hay una indeterminación **∞ - ∞** *sálvenla* <u>trabajando la expresión</u>

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5-x^5\right)=$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2\right)=$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+4)-x\right]=$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^5-7x^5\right)=$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^3-2x^2\right)=$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\left(\frac{5}{3}x+4\right)+\frac{5}{3}x\right]=$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-x^5\right)=$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2\right)=$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+4)-x\right]=$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^5-7x^5\right)=$ k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^3-2x^2\right)=$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{5}{3}x+4\right)-\frac{5}{3}x\right]=$

<u>Caso</u> $\frac{\infty}{\infty}$

Es posible trabajarlo con las mismas funciones y condiciones que el caso anterior

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{h(x)}}{\frac{1}{t(x)}}\right]$$ y por división de fracciones: $$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{h(x)}}{\frac{1}{t(x)}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{t(x)}{h(x)}=\frac{0}{0}$$

⇦ **INDETERMINACIÓN**

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}1=1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$

INDETERMINACIÓN
pues puede dar cualquier *cosa*
según el caso

<u>Límite de variables tendiendo a infinito entre cocientes de funciones polinómicas</u>

Son casos como el siguiente $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2}{2x+1}=$

Si tratásemos de calcular el límite por reemplazo directo nos encontraríamos ante una indeterminación del tipo: $\frac{\infty}{\infty}$

Para salvar la indeterminación vamos a usar un *viejo truco:* multiplicar y dividir por un mismo número. En nuestro caso lo adaptaremos usando como "número" a la **<u>máxima potencia con la que aparezca "x"</u>**, ya sea en el numerador o en el denominador. Esto lo podemos hacer porque **x tiende a infinito** y, por lo tanto, **nunca es cero**.
En nuestro ejemplo es $\mathbf{x^3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x^3+2}{2x+1}\right]\left[\frac{x^3}{x^3}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{5x^3+2}{x^3}}{\frac{2x+1}{x^3}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{5\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}+\overbrace{\frac{2}{x^3}}^{=0}}{\underbrace{\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{3}\,2}}}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{=0}}\right]=\frac{5+0}{0+0}=\frac{5}{0}=\infty$$

Regla práctica

- Si el grado de **f(x)** ≥ grado de **g(x)** entonces el **límite da infinito** y su **signo** es el del **coeficiente principal** de **f(x)**
- Si el grado de **f(x)** < grado de **g(x)** entonces el **límite da cero**
- Si el grado de **f(x)** = grado de **g(x)** entonces el **límite** da el **cociente** entre los **coeficientes principales** de **ambas** funciones polinómicas

Ejemplos: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-4x+1}{-3x+1}=\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2}{x-4}=-\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^5+x}{4x^8-x-8}=0$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+x-1}{-2x^4+x^3}=-\dfrac{3}{2}$

10) Calculen los siguientes límites. Si hay una indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$ sálvenla usando las reglas vistas

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-16}{x-4}=$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^7-1}{x^5-1}=$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2-6x+9}{x^5-3}=$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^7+11x+1}{x^7-1}=$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{2x^2+4}=$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^7+5x-1}{x^6+9}=$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-4x^6+8x+4}{3x^6+1}=$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-7x+6}{-5x^3+5x^2+2x-8}=$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^3+x}{3x-2}=$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^5+4x-2}{-3x^5+1}=$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+x^5+11}{-x^5-x^2+25x-82}=$ l) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-x-3}{x-2}=$

Cálculo de límites de variable infinita de funciones del tipo: $[f(x)]^{g(x)}$

Bastará aplicar la siguiente regla de los límites:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}[f(x)]^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)]}$$

siempre que no quede $0^0 \vee \infty^0 \vee 1^\infty$

11) Calculen los siguientes límites. Usen las reglas vistas

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+9}{x^2-3}\right]^{\frac{2x^2+1}{x^2+x-1}}=$ Rta : 4

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{-8x^5-6x+9}{x^5-3}\right]^{\frac{2x^3+1}{x^3-1}}=$ Rta : 64

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^2+6x+9}{x+1}\right]^{\frac{2x^2}{x^2+x}}=$ Rta : 8

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}\right]^{4x^2}=$ Rta : 0

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+9}{x^2-3}\right]^{\frac{2x^2+1}{x^5+x-1}}=$ Rta : 1

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+9}{x^2-3}\right]^{-\frac{2x^2+1}{x^2+x-1}}=$ Rta : $\dfrac{1}{4}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2-4}{x-2}\right]^{\frac{x^2-4}{x+2}}=$ Rta : 1

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^{11}-3x^2-4x+1}{-2x^{11}+2x+1}\right]^{\frac{x^2-1}{x^3-2x+1}}=$ Rta : 1